TEOREMES DE KOEBE I DE BIEBERBACH

1. Comparació entre els radis de dos recintes, un dels quals és interior a l'altre

La introducció del concepte del radi d'un recinte ens permet simplificar notablement i exposar en forma sistemàtica, sense necessitat d'utilisar les funcions de Green, algunes propietats demostrades incidentalment en les investigacions de Koebe, que hem d'utilisar sovint.

Es diu que *un recinte g és dins d'un altre G*, o que $g \prec G$, *quan tots els punts de g estàn en* G *i aquest conté punts que no són en g.*

Considerem els radis d'un punt O interior a g i per tant a G. Es fàcil veure que *el radi* R *de* O *respecte a* G *és major que el radi r de* O *respecte a g.* En efecte: al transformar G en C en el pla z' per exemple, els punts del transformat de g formen un recinte interior a $C_{z'}$, que anomenarem g'. Considerem per altra part C_w transformat de g' en el pla de w. Aplicant ara a la correspondencia entre z i w el lema de Schwarz, es tindrà dins de C_w,

$$|w| < |z| .$$

Posant $w = \varphi(z)$ i aplicant la desigualtat anterior a l'origen, resulta

$$|\varphi'(o)| > 1$$

Tenint això en compte, la igualtat

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|_o = \left|\frac{d\varphi}{dz'}\right|_o \left|\frac{dz'}{dz}\right|_o$$

es converteix, en virtut del valor de radi d'un recinte, en aquesta desigualdat

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{R}$$

la qual demostra la proposició.

2. Limitació del radi d'un recinte simplement conex i d'una fulla (Koebe)

Imaginem un punt O interior a un recinte en les condicions de l'enunciat; sigui d la seva mínima distancia al contorn i D la màxima, la qual pot no tenir límit finit.

D'aquesta limitació de distancies al contorn es dedueix una altra limitació de radis. En efecte: el recinte més extens que es pot imaginar en un pla, tal que la seva menor distancia a un punt O sigui d és el determinat per un tall arbitrari del pla el vèrtex del qual disti d de O i que per l'altre costat s'estengui indefinidament. Així mateix, aquest recinte està inclòs en el pla de dues fulles del qual el tall sigui la linia de pas d'una fulla a l'altra. El pla doble es farà simplement conex, v. g., per un tall segons la direcció de d i que s'estén des del seu vèrtex indefinidament. Imaginem que el pla primitiu constitueixi la fulla superior, i que el tall esmentat del pla de dues fulles estigui en la fulla inferior. Del pla doble es passa al semiplà mitjançant la transformació $w = \sqrt[4]{z}$. La direcció del tall es pendrà com a eix de les x i d'aquesta manera apareix el semiplà transformat contenint en son interior el pla primitiu. Les coordenades primitives del punt O són d com a radi vector i 180° com a argument. Les seves transformades són $\sqrt[4]{d}$ i 45°. El radi per a aquest punt val

$$8d \operatorname{sen} 45^\circ = 4\sqrt{2}\,d.$$

Per tant, en virtut del teorema anterior, el radi de O en el recinte donat no serà major que aquest. Per altra part, traçant una circumferencia de centre O i radi d es forma un recinte interior al donat, i, com que el seu radi és evidentment d, resulta que, anomenant ρ el radi O en el recinte donat,

$$d<\rho<4\sqrt{2}d.$$

Hem pres per a ρ un límit superior suficient per al nostre objecte, valent-nos d'un recinte auxiliar molt senzill; però hom pot trobar límits superiors un xic més petits de la mateixa forma kd. El menor de tots el valors possibles de k s'anomena *constant de Koebe.* (*)

3. Limitació del radi en estar la distancia de O al contorn compresa entre un màxim i mínim finits (Koebe)

Sigui a el primer i λa el segón ($\lambda < 1$). El doble cercle de radi a compendrà evidentment el recinte donat. Amb un tall apropiat, v. g., en la fulla inferior, es farà simplement conex el doble cercle. Podem pendre la linia de trànsit d'una fulla a l'altra arrancant del punt A del contorn, la distancia del qual al punt considerat O és λa.

El valor del radi en O per al doble cercle és (Conferencia II, § 6),

$$\rho=\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}a;$$

com que la fracció és inferior a 1,

$$\lambda a<\rho<\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}a<a.$$

(*) Nom proposat per Osgood. La seva determinació numérica exacta no és fàcil.

Resulta, doncs, ρ inferior constantment no sols a a (conseqüencia evident del § 1) sinó inferior a número fix menor que a.

Encara que el recinte donat omplís el cercle de radi a per complet, mentre comprengués el seu contorn un punt a menor distancia, es compliría la desigualtat anterior.

4. Teorema de la deformació del contorn (Koebe)

Sigui un cercle C_{qz} de radi q en el pla de la variable z i considerem el conjunt de totes les funcions analítiques regulars $w=f(z)$ dins de C_{qz} tals que amb elles es transformi C_{qz} en un recinte simplement conex d'una fulla amb les condicions següents

$$f(0)=0 \qquad f'(0)=1.$$

La funció pendrà evidentment la forma següent, perfectament definida dins de C_{qz}

$$w=z+az^2+bz^3+\ldots.$$

Teorema. *El recinte transformat de* C_{qz} *conté un cercle fix* C_{rz} *de radi* r. 2.^{on} *El recinte transformat d'un cercle fix* $|z|\overline{\leq}q\tau<q$ *està contingut en un cercle de radi determinat* R *independent de* w.

La demostració que segueix té dues parts.

Primera part: La transformada en w *de* C_{qz} *inclou* C_r *essent* $r>0$. En efecte: sigui d la mínima distancia al contorn de O_w transformat de l'origen O_z centre de C_{qz}. Segons el que s'acaba de demostrar en (2)

$$d<\rho<kd$$

essent k la constant de Koebe. Ara, el radi de O_w és evidentment q. Tenim, doncs

$$d<q<kd$$

d'aquí

$$d > \frac{q}{k}.$$

Segona part: Qualsevulga que sigui la funció w, per a tot $C_{q\tau z}$ interior a C_{qz} la transformada és interior a una circumferencia, el radi R *de la qual no depèn de la funció $w=f(z)$, sinó sols de τ.* En efecte: sigui S el transformat de C_z i O_w l'homòleg del centre i origen O_z. Sigui d_w la mínima distancia de O_w al contorn de S, la qual, segons ço que s'acaba de dir, serà major que $\frac{1}{k}$. Per altra part, és evident que $d_w < 1$. Consideri's ara un recinte format pel pla doble, en què es deixa arbitraria la linia de trànsit, però que es fa simplement conex amb un tall rectilini en la fulla inferior, per exemple, a partir del punt 1. Es evident que S quedarà tot ell inclòs dins d'aquest recinte. Mitjançant una transformació ja coneguda, es pot passar del doble pla a $C_{w'}$. Sigui S′ el transformat de S, el qual anirà inclòs en $C_{w'}$. En la correspondencia conforme entre les z i les w', la transformada de C_z quedarà dins de $C_{w'}$. El lema de Schwarz condueix per a

$$|z| \overline{\overline{<}} \tau < 1$$

a

$$|w'| < \tau.$$

Per tant, en el pla w, tota transformada S_w del cercle $C_{q\tau z}$ de radi $\tau < 1$ és inclosa en el transformat de $C_{\tau w'}$.

Examinant la funció que realisa la correspondencia entre w i w' es fa palès que a $C_{q\tau w'}$ correspòn una curva en el pla w la distancia de la qual al centre és inferior a cert límit K que depèn de τ exclusivament.

Es fàcil estendre el teorema de C_z a C_{qz}; cal només multiplicar per q els mòduls en totes les representacions, resultant aleshores els recintes transformats del cercle $C_{q\tau}$ dins d'un cercle de radi Kq.

Prenent com a recinte auxiliar el pla doble amb el tall $\underline{1\infty}$, el valor que resulta per a K és $2\dfrac{1+\tau^2}{(1-\tau)^2}$

5. Teorema de l'àrea mínima (Bieberbach)

Al transformar C_{qz} per una funció de la forma

$$w = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots .$$

s'ha demostrat que el mòdul d de la transformada estava comprès entre un límit inferior major que q i un altre de superior; $d < q < kd$.

Suposant els plans w i z de manera que es corresponguin els origens i els eixos de les quantitats reals, la transformada de C_{qz} entrarà dins de C_{qz} i part d'ella mateixa quedarà fòra de C_{qz}.

Vejam les àrees dels dos recintes corresponents.

$$\text{Area de } C_{qz} = \int_0^q \int_0^{2\pi} r\, dr\, d\varphi = \pi q^2 .$$

Per a obtenir l'àrea de la transformada caldrà només multiplicar els valors de r i dr pel mòdul de la dilatació $|f'(z)|$ ja que es tracta de representació conforme.

$$\text{Area}_w = \int_0^q \int_0^{2\pi} r\, |f'(z)|^2\, dr\, d\varphi .$$

Sigui $\overline{f}$ la conjugada de f obtinguda canviant i per $-i$. Es tindrà designant per α_i el valor absolut de a_i:

$$f'(z) = 1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots .$$

$$\overline{f}'(z) = 1 + 2\overline{a}_2\, \overline{z} + 3\overline{a}_3\, \overline{z}^2 + \ldots .$$

d'on

$$\begin{aligned}|f'(z)|^2 = 1 &+ 4\alpha_2^2 r^2 + 9\alpha_3^2 r^4 + \dots\\ &+ 2a_2 e^{\varphi i} + 3a_3 e^{2\varphi i} + \dots\\ &+ 2\overline{a}_2 e^{-\varphi i} + 3a_3 e^{-\overline{2\varphi} i} + \dots\end{aligned}$$

essent φ l'argument de z. Aquestes potencies de $e^{\varphi i}$ a l'integrar entre O i 2π desapareixen i queda

$$\text{Area}_w = \pi q^2 + 2\pi\alpha_2^2 q^4 + 3\pi\alpha_3^2 q^5 + \dots > \pi q^2 .$$

D'on se dedueix que la transformada té una àrea *sempre major* que la del cercle primitiu. A l'inrevés, una vegada hagim demostrat l'existencia d'una funció que transforma un recinte qualsevulga simplement conex en un cercle (problema de Riemann), *la funció buscada serà la que faci mínima l'àrea del recinte transformat.*

Per a trobar, doncs, la representació d'una àrea damunt del cercle es podrà operar aproximadament mitjançant funcions de la forma polinomia

$$z = w + a_2 w^2 + a_3 w^3 + \dots$$

en què el nombre de coeficients és finit i que es determinen per la condició d'ésser

$$\int\int |z'|^2 r\, dr\, d\varphi = \text{mínim}.$$